Δίνονται οι ευθείες

$(\varepsilon_1): \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 12+2t \\ z = 12+8t \end{cases}$ και $(\varepsilon_2): \begin{cases} x = 11+6t \\ y = -4-4t \\ z = 2+2t \end{cases}$

α) Να βρεθεί η σχετική θέση των 2 ευθειών

β) " " το σημείο τομής τους

γ) " " το επίπεδο στο οποίο βρίσκονται

δ) " " η απόσταση μεταξύ των (ε_1) και (ε_2)

ε) " " οι παραμετρικές εξισώσεις της ευθείας (δ) που διέρχεται από το σημείο τομής των (ε_1), (ε_2) και είναι κάθετη στο επίπεδο που περιέχει τις (ε_1), (ε_2)

ΛΥΣΗ

α) Οι ευθείες δίνονται σε ποιο συνηθισμένη μορφή!

$(\varepsilon_1): \dfrac{x-k}{a_1} = \dfrac{y-\lambda}{a_2} = \dfrac{z-\mu}{a_2} = t \Rightarrow \begin{cases} x = a_1 t + k \\ y = a_2 t + \lambda \\ z = a_3 t + \mu \end{cases}$

Άρα, $\vec{a} = (4, 2, 8)$ και $A(1, 12, 12)$

$(\varepsilon_2): \dfrac{x-\nu}{\beta_1} = \dfrac{y-\xi}{\beta_2} = \dfrac{z-\pi}{\beta_3} = t \Rightarrow \begin{cases} x = \beta_1 t + \nu \\ y = \beta_2 t + \xi \\ z = \beta_3 t + \pi \end{cases}$

Άρα, $\vec{\beta} = (6, -4, 2)$ και $B(11, -4, 2)$

βλέπουμε ότι $\vec{\alpha} \not\parallel \vec{\beta} \Rightarrow \vec{a} \neq \lambda \vec{\beta} \Rightarrow$ οι $(\varepsilon_1) \not\parallel (\varepsilon_2)$

δηλαδή οι (ε_1) και (ε_2) θα είναι ασύμβατες ή θα τέμνονται

$\vec{AB} = (10, -16, -10)$. Για να 'ναι ασύμβατες αρκεί $\det(\vec{AB}, \vec{a}, \vec{\beta}) \neq 0$

Βρ., $\det \begin{vmatrix} 10 & -16 & -10 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0$ άρα τέμνονται β) $(\varepsilon_1): \dfrac{x-1}{4} = \dfrac{y-12}{2} = \dfrac{z-12}{8}$

$(\varepsilon_2): \dfrac{x-11}{6} = \dfrac{y+4}{-4} = \dfrac{z-2}{2}$

<u>α' τροπος</u>

Θετω $(\varepsilon_1) = t$ και $(\varepsilon_2) = l$

$$(\varepsilon_1): \begin{cases} x = 1+4t \\ y = 12+2t \\ z = 12+8t \end{cases} \qquad (\varepsilon_2): \begin{cases} x = 11+6l \\ y = -4-4l \\ z = 2+2l \end{cases}$$

Άρα,
$$\begin{cases} 1+4t = 11+6l \\ 12+2t = -4-4l \\ 12+8t = 2+2l \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4t-6l-10=0 \\ 2t+4l+16=0 \\ 8t-2l+10=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2t-3l-5=0 \quad ① \\ 2t+4l+16=0 \quad ② \\ 4t-l+5=0 \quad ③ \end{cases} \Rightarrow$$

$$\xRightarrow{①-②} -3l-4l-21=0 \Rightarrow \boxed{l=-3}$$

$$\xrightarrow{①} 2t-3\cdot(-3)-5=0 \Rightarrow 2t+4=0 \Rightarrow \boxed{t=-2}$$

$$\xrightarrow{③} 4(-2)+3+5=0 \quad \text{ισχυει}$$

Άρα
$$\begin{cases} x = 1+4(-2) = 1-8 = -7 \\ y = 12+2(-2) = 12-4 = 8 \\ z = 12+8(-2) = 12-16 = -4 \end{cases}$$

Άρα, το σημείο τομης είναι το $M(-7,8,-4)$

<u>β' τροπος</u>

$$(\varepsilon_1): \begin{cases} 2x-2 = 4y-48 \\ 8x-8 = 4z-48 \end{cases} \Rightarrow (\varepsilon_1): \begin{cases} x-2y+23=0 \\ 2x-z+20=0 \end{cases}$$

$$(\varepsilon_2): \begin{cases} -4x+44 = 6y+24 \\ 2x-22 = 6z-12 \end{cases} \Rightarrow (\varepsilon_2): \begin{cases} -2x-3y+10=0 \\ x-3z-5=0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} x &= -7 \\ y &= 8 \\ z &= -4 \end{aligned}$$

γ) $(\varepsilon_1), (\varepsilon_2) \in (\Pi_1)$ με $M \in (\Pi_1)$ και $\vec{\alpha} \nparallel \vec{\beta}$.

$$(\Pi_1): \begin{vmatrix} x+7 & y-8 & z+4 \\ 4 & 2 & 8 \\ 6 & -4 & 2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow 9x+y-7z+171=0$$

δ) Αφού οι ευθείες τέμνονται προφανώς η απόσταση τους θα ισούται με μηδέν

ε)

$$(\delta): \frac{x+7}{n_1} = \frac{y-8}{n_2} = \frac{z+4}{n_3} \quad \text{με } \vec{n} = (n_1, n_2, n_3) \parallel (\delta)$$

καθώς $\vec{n} \perp (\Pi_1) \Rightarrow \vec{n} = (9, 1, -7)$

Άρα, $(\delta): \dfrac{x+7}{9} = \dfrac{y-8}{1} = \dfrac{z+4}{-7}$